Uit: Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912 / 1913, 105-128.

J. A. SCHOUTEN,

ELECTRO-TECHNISCH INGENIEUR.

OVER HET IMAGINAIRE DER WISKUNDE IN VERBAND MET DE KATEGORIEËNLEER.

Overgedrukt uit de Handelingen van het Genootschap voor Zuivere Rede 1912-1913.

OVER HET IMAGINAIRE DER WISKUNDE IN VERBAND MET DE KATEGORIEËNLEER.

Sinds EUCLIDES in zijn „Elementen" de grondslagen legde tot onze moderne wiskunde, hebben er binnen het gebied dier wiskunde twee scherp onderscheiden gebieden bestaan:

1. de leer der op een enkele getallenrij af te beelden hoeveelheid zonder meer, de *Arithmetiek* of *Algebra in engeren zin*, (zonder imaginairen), en

2. de leer van gebieden van meerdere afmetingen, die voorloopig niet zuiver wiskundig werd opgebouwd, maar direct in haar toepassing op de Natuurkategorie Ruimte optrad als Meetkunde.

Bij EUCLIDES berustte die scheiding dan in de eerste plaats op het scherp uiteenhouden van rationeele en irrationeele getallen, welke laatste hij niet als getallen wilde erkennen. Zoo schrijft hij bijv. Elem. Boek 10. 7:

„Onderling onmeetbare grootheden verhouden zich niet als getallen".

Deze scheiding verdween nu in den loop der eeuwen, in 1637 voerde DESCARTES coordinaten in, en werkte met alle verhoudingen van lijndeelen als met getallen, en in 1707 kon NEWTON aan het hoofd van zijn „Arithmetica Universalis" als definitie van het getal schrijven:

„Wij hebben een getal niet zoozeer op te vatten als een veelheid van eenheden, als wel als de abstracte verhouding van de een of andere hoeveelheid tot een andere van dezelfde soort, die dan voor de eenheid gehouden wordt".

Een eeuwenlang bestaande slagboom was hiermede uit den weg geruimd, en de meetkunde kon thans, mede onder gebruikmaking van de door DESCARTES definitief ingevoerde negatieve getallen, in zekeren zin worden teruggevoerd op de rekenkunde. Intusschen nog niet op alleszins bevredigende wijze. Wel was het door de zoogenaamde analytische meetkunde mogelijk geworden voor meetkundige vraagstukken een algebraïsche oplossing te vinden, maar dat was dan ook een oplossing, die allerminst naar den smaak was van den echten meetkundige. Deze toch wil met lijnen, vlakken en hoeken werken, hij wil een methode, die zich direct aanpast aan het in de ruimte gegevene, en niet een, die eerst alle voorkomende gerichte grootheden in 3, voor het vraagstuk beteekenislooze, componenten ontbindt, om dan met die componenten te werken, en de drie gescheiden resultaten eerst later weer samen te stellen. Den echten meetkundige is een dergelijke ontbindingsmethode, hoe gemakkelijk ook vaak in de behandeling, een omweg voor het begrip, een kunstmatige werkwijze, die zich niet geheel aanpast aan de te behandelen stof.

En hij heeft daarin gelijk. De Arithmetiek en de Algebra zonder imaginairen zijn zuiver aangepast aan de betrekkingen tusschen grootheden, die zich laten afbeelden op de rij der reëele getallen van $-\infty$ tot $+\infty$, zij is dus een leer van *eendimensionale uitgebreidheid*, (waarbij we bij uitgebreidheid volstrekt nog niet aan ruimte of tijd moeten denken). Wordt een dergelijke leer nu toegepast op gerichte grootheden, die zich slechts laten afbeelden op een uitgebreidheid van meer dan een afmeting, dan ontstaat er noodzakelijk *disharmonie* tusschen *methode en stof*. Wie de snelheid en de versnelling berekent van een lichaam, dat om een vast punt draait, en dat doet volgens de gewone analytische methode, krijgt een eenvoudige uitkomst, ziet zekere regelmatigheid in de formules, maar de symboliek spreekt niet tot het begrip, en die eenvoudige uitkomst wordt verkregen door een ingewikkelde en ondoorzichtige kunstbewerking. Er onstaat bij hem het *verlangen* naar een rekenwijze, die hetzelfde doet voor meerdimensionale uitgebreidheden, wat de algebra zonder imaginairen doet voor de eendimensionale.

Dit verlangen werd al uitgesproken door LEIBNIZ in 1629, dus 40 jaren voor het verschijnen van DESCARTES' Geometrie, en wel in een schrijven aan HUYGHENS.*) Wij lezen in dat schrijven:

„Ik ben nog niet tevreden met de Algebra, daar zij ons niet in staat stelt de korste wegen te volgen, noch de mooiste constructies te vinden, zooals de Meetkunde dat doet. Daarom geloof ik dan ook, wat dit betreft, dat wij een andere analyse noodig hebben, die eigenlijk geometrisch of lineair is, en die direct een uitdrukking geeft voor de *ligging* (situm), zooals de Algebra dat doet voor de *grootte* (magnitudem). En ik meen hierin het middel te zien om figuren en zelfs machines en bewegingen door letters voor te stellen, zooals de Algebra getallen of grootheden voorstelt".

„De Algebra is niets anders, dan de leer der onbenoemde getallen of grootheden. Maar zij is niet in staat een onmiddellijke uitdrukking te geven voor de ligging, de hoeken, en de beweging, reden waarom het dikwijls moeielijk is, al wat in de figuur is, berekenend af te leiden".

„Doch deze nieuwe rekenwijze, die geheel de figuur volgt, zou zeker ter zelfder tijd kunnen geven èn de oplossing, èn de constructie, èn het geometrisch bewijs, en dat alles op een natuurlijke wijze, en met één analyse".

„Ik geloof, dat men op deze wijze de mechanica bijna zou kunnen behandelen als de geometrie".

Deze aanhalingen zijn wel een sprekend bewijs voor het wonderbaarlijk genie van LEIBNITZ, niet alleen voorzag hij een mathematische ontwikkeling van meer dan twee eeuwen, maar hij wist ook van een hem geheel onbekend stelsel, dat zich eerst na tweehonderd jaar zou beginnen te ontwikkelen, de hoofdeigenschappen en de kenmerkende voordeelen met groote juistheid te voorspellen. Dat het bij voorspellen bleef, en een door LEIBNITZ zelf ontworpen schets van een nieuwe analyse weinig waarde bleek te bezitten, is onbelangrijk, en treedt bij het geniale van zijn visie geheel op den achtergrond.

Intusschen was een der wegen, die tot het nieuwe stelsel zouden voeren reeds betreden, en wel die, welke leidt over

*) Christi Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ed. Uylenbroek. Hagae comitum 1833. fasc. I bldz. 9.

de gewone imaginaire eenheid $\sqrt{-1}$. Reeds de oude Indische mathematicus Bhaskara was zich duidelijk bewust van de onmogelijkheid van een getal, welks tweede macht een negatief getal is. Dit onmogelijke echter als een bepaald *nieuw soort* getal te stellen, bleef voorbehouden aan de Italiaansche algebristen der zestiende eeuw. Bij dat stellen bleek dan, dat met imaginaire getallen even goed gerekend kon worden als met gewone, en dat de uitkomsten juist waren, hoewel volstrekt in het duister bleef, welke beteekenis aan deze nieuwe getallen gehecht moest worden. De zonderlingste denkeelden waren daaromtrent in omloop, zoo beschreef LEIBNIZ ze bijvoorbeeld als:

„elegante(n) und wunderbare(r) Zuflucht des Göttlichen Geistes, amphibienähnliche(n) Grössen zwischen dem Seienden und nicht Seienden".

Er kwam eerst licht, toen men ontdekte, dat de complexe getallen, zijnde de combinaties van een gewoon en een imaginair getal, even geschikt waren, om zekere relaties in een plat vlak af te beelden als de gewone getallen de relaties in een rechte lijn. Nadat door eenige voorloopers, WALLIS 1693, KÜHN 1750, reeds pogingen in deze richting gedaan waren, werd de oplossing gegeven door CASPAR WESSEL in 1799, de ABBÉ BUÉE in 1804, en ARGAND in 1806, welke laatste meestal officieel als de grondlegger der theorie wordt genoemd.

Staan we bij die meetkundige beteekenis een oogenblik stil. Zij $x = x_1 + x_2 i$ een complex getal bijv. $x = 4 + 2i$, waarbij $i = \sqrt{-1}$, dan kan men in een vlak twee onderling loodrechte lijnen aannemen, en op elk een maatverdeeling aanbrengen, bijvoorbeeld in centimeters. We kunnen nu onder $4 + 2i$ in de eerste plaats verstaan de combinatie van twee loodrechte lijnen, de een 4, de ander 2 centimeters lang, en de tweede aanvangende in het eindpunt van de eerste.

Fig. 1.

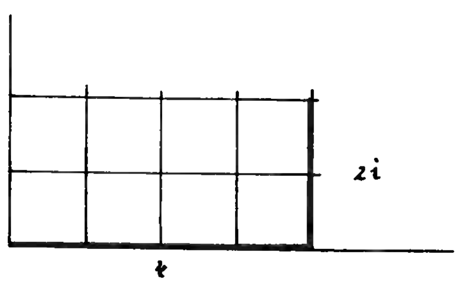
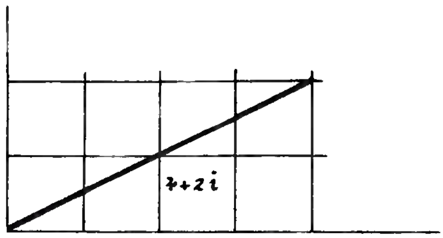


Fig. 2.



Noemen we bijvoorbeeld de horizontale richting Oost, en de verticale Noord, dan kunnen we zeggen, $x = 4 + 2i$ beteekent een reis van 4 centimeters in Oostelijke richting, gevolgd door een reis van 2 centimeters in Noordelijke. Maar we kunnen ook, en dit is principieel verschillend, onder $4 + 2i$ verstaan de eene lijn vanuit O naar het punt P, of, in beeld, een reis in eén enkele richting ergens tusschen Oost en Noord in, die hetzelfde begin- en eindpunt heeft als de eerste reis. (fig. 1 en 2).

Dat die opvattingen principieel verschillen, blijkt bijv. hieruit, dat in het eerste geval een andere beweging als die in Oostelijke of Noordelijke richting niet mogelijk behoeft te zijn, en in het tweede geval alleen de mogelijkheid van een beweging in schuine richting noodig is. Een wandelaar in de straten van New-York kan reizen van de eerste soort volbrengen, die van de tweede soort echter niet, evenzoo een kasteel van het schaakspel; reizen van het aangegeven type der tweede soort kunnen echter worden volbracht door een paard van het schaakspel.

Tellen we nu eens twee complexe getallen bij elkaar op, bijv. $2 + 4i$ en $4 + 2i$, dan luidt die optelling:

$$(2 + 4i) + (4 + 2i) = (6 + 6i)$$

Volgens de eerste opvatting beteekent dit alleen, dat een reis van 2 centimeter naar het Oosten en 4 centimeter naar het Noorden, gevolgd door een reis van 4 centimeter naar het Oosten en 2 centimeter naar het Noorden gelijk staat met een reis van 6 centimeter naar het Oosten en 6 centimeter naar het Noorden.

Fig. 3.

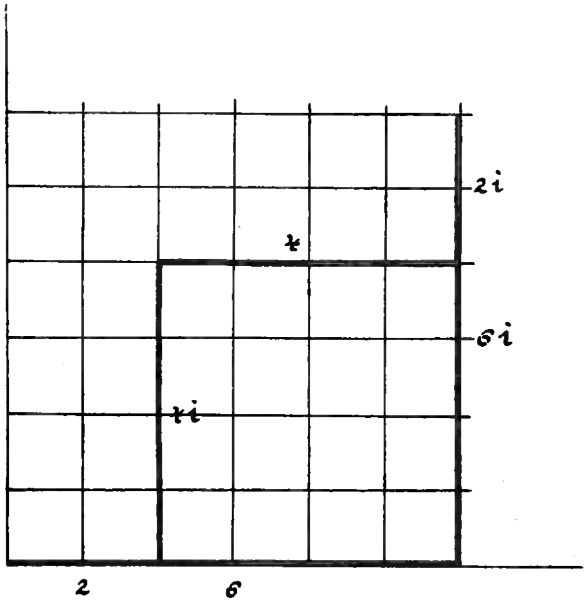
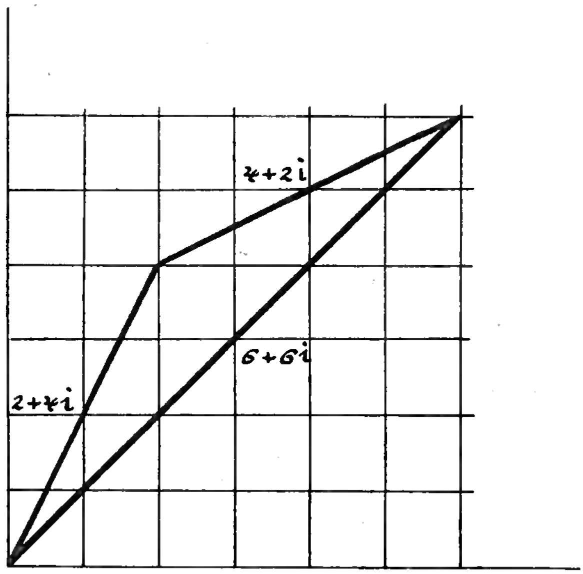


Fig. 4.



Eigenlijk beteekent dus hier de complexe optelling niets anders dan het los en zonder verband naast elkaar bestaan van de twee optellingen:

$$2 + 4 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

welke twee optellingen alleen in *één symbool* zijn samengevat. We verwijderen ons dus hier niet principieel van de gewone wijze van rekenen, en ik stel U voor deze opvatting derhalve te noemen de *arithmetische* of *zuiver quantitatieve.* (fig. 3.)

Nemen we nu de tweede opvatting, dan zien we iets geheel anders, de vergelijking:

$$(2 + 4i) + (4 + 2i) = 6 + 6i$$

drukt nu uit, dat een reis in zekere schuine richting, gevolgd door een reis in een andere schuine richting, te zamen vervangen zouden kunnen worden door een reis in een richting die nog weer anders schuin is. In het schaakspel zouden we zeggen: 4 geschikt gekozen paardesprongen geven aan een paard dezelfde verplaatsing, die een raadsheer in een zet van zes diagonaalvelden zou kunnen bereiken. U voelt direct het principieel nieuwe van deze opvatting, elk complex getal is zelf een entiteit geworden met een eigen richting, niet een louter symbool voor de gelijktijdige aanwezigheid in het denken van twee getallen, en alle richtingen in het vlak zijn als het ware gelijkberechtigd, al zijn ze alle verschillend van aard. (fig. 4.)

Met, dat we echter dien verschillenden aard bedenken, hebben we ons af te vragen, waarin dat verschil, in de eerste plaats dan van de beide richtingen waar we van uitgingen: 1 en i, kan bestaan? En het antwoord kan dan niet meer luiden, dat we hier hebben een *quantitatief* verschil, want alleen 2, 3, enz. verschillen van 1 quantitatief, maar we komen noodzakelijk tot de erkenning van het feit, dat dit verschil er een is van *qualitatieven* aard. 1 en $\sqrt{-1}$ zijn eenvoudig verschillend, afgescheiden van hun quantiteit, ik kan de eene eenheid vergrooten of verkleinen, zonder dat dat verschil ooit is op te heffen, zij verschillen *qualitatief.*

Indien nu echter tellen een niet onderscheidend onderscheiden van iets en wat anders is, dan zijn we bij het rekenen met complexe getallen, die uit *wel* onderscheiden eenheden bestaan, niet meer aan het tellen zonder meer. Anders gezegd brengen we bij het invoeren van complexe getallen zich onderling onderscheidende eenheden in de wiskunde, die als eenheden, die wat inhouden, niet meer eenheden zonder meer zijn; daarmede verlaten we dan echter ook onherroepelijk de kategorieën der *quantiteit*, en halen de kategorieën der *qualitatieve quantitet*, der *maat* binnen.

Volkomen zuiver werd dit reeds in 1804 ingezien door den ABBÉ BUÉE, reeds straks genoemd, die in een in 1806 gedrukte verhandeling schreef:

„La perpendicularité, indiquée par le signe $\sqrt{-1}$ est une qualité. Par conséquent une quantité accompagnée de ce signe, n'est pas une quantité abstraite, parce que ces unités ne sont pas des unités abstraites[1])", woorden, zoo vol dialectisch besef, dat ik niet kan nalaten ze nu nog eens in het Hollandsch te herhalen:

„De loodrechtheid, aangeduid door het teeken $\sqrt{-1}$, is een qualiteit. Een quantiteit, die van dit teeken vergezeld gaat, is dus geen quantiteit zonder meer, aangezien hare eenheden geen eenheden zonder meer zijn".

Dit inzicht gaf nu BUÉE, die zich de wiskunde als leer van zuivere quantiteit dacht, aanleiding, de tweede der straksvermelde twee opvattingen van het complexe getal te verwerpen, en alleen de eerste voor de ware te houden, die dus, waarbij we in een complexe optelling alleen het symbool zien van twee volkomen onafhankelijk naast elkaar bestaande gewone optellingen. Hier moeten wij de groote consequentie van BUÉE erkennen. BUEE's werk vondt weinig erkenning van tijdgenooten en eerst in 1894 werd er de aandacht weer eens op gevestigd door JANSSEN VAN RAAY[2]). Bij de tijdgenooten voerden de resultaten, bij de werkelijke berekening met complexe grootheden bereikt, al ras tot hunne algeheele erkenning, echter zonder dat men er zich in het algemeen rekenschap van gaf, dat er een nieuwe kategorie was ingevoerd, zoodat men bijvoorbeeld tot op den huidigen dag rustig spreekt over complexe *grootheden*, hoewel dat toch eigenlijk niet heelemaal zuiver is, daar de vraag naar de *hoegrootheid* hier niet zonder meer zin heeft, en er

---

1) Mémoire sur les quantites imaginaires, Philos. Transact. 1806, bldz. 27.

2) W. H. L. Janssen van Raay, Sur les quantités imaginaires en algébre, Archive du Musée Teyler Serie I, T IV part. 2.

voor duidelijke bepaaldheid nog een vraag naar de *hoedanigheid* bij moet komen.

Beschouwen we nu nog eens onze meetkundige voorstelling, dan volgt uit het feit, dat

$$i \times 1 = i$$

dat i niet alleen een gerichte grootheid is, maar ook, verbonden met vermenigvuldigingsteeken, het symbool voor een draaiing over een rechten hoek, een *operatiesymbool* dus. Daar ook $i \times i = -1$, werkt i ook op zichzelf als draaioperator, en daar

$$(i \times i) \times 1 = i \times (i \times 1) = 1,$$

blijft de associatieve wet, dat is de wet, die zegt, dat bijv.:

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

ook voor het complexe stelsel gelden.

Gaan we nu over naar stelsels met meerdere soorten van eenheden, en zulke stelsels bestaan er zeer vele, dan treden er in zooverre geen nieuwe gezichtspunten op, als ook deze stelsels vallen onder de kategorieën der maat. Ook hier kunnen we een complex getal aan de eene zijde duiden als *grootheid*, aan de andere zijde als *operatiesymbool*, een onderscheid, dat overeenkomt met het onderscheid tusschen *gewoon getal* en *ranggetal* in de zuivere quantiteitsleer, en waarvan dat laatstgenoemde onderscheid eigenlijk maar een voorlooper is. Er blijkt echter, dat in die hoogere systemen de gewone wetten van vermenigvuldiging niet zonder meer opgaan, bijvoorbeeld niet meer algemeen $a \times b$ gelijk is aan $b \times a$, waardoor dan de begrippen der operatiewijzen *vermenigvuldiging* en *deeling* een belangrijke verruiming ondergaan.

Daarop wil ik hier nu echter niet verder ingaan, en er liever uw aandacht op vestigen, dat deze hoogere stelsels even geschikt zijn voor de meetkunde in de ruimte als de gewone rekenkunde voor alles wat zich in een rechte lijn afspeelt, en we dus hier inderdaad te maken hebben met de rekenwijzen waarop LEIBNIZ het oog gehad heeft. Om U een voorbeeld te geven, hoe nauw die rekenwijzen zich nu inderdaad aanpassen aan het gebied waarop zij betrekking hebben, wil ik U alleen meedeelen, dat in de algemeene analyse voor het platte vlak, een stelsel met 12 eenheden, het product van twee punten hun verbindingslijn, de som hun gemeenschappelijk zwaartepunt is, en evenzoo het product van twee lijnen van bepaalde grootte en met een bepaalden richtingszin, hun snijpunt, de som hun resultante is.

We hebben dus in de wiskunde onderscheiden een leer van quantiteit en een leer van maat, allicht zult U zich afvragen, is er dan niet ook een deel van de wiskunde, dat leer van zuivere qualiteit zou mogen heeten? En dat is nu inderdaad het geval. Het zal U bekend zijn, dat de logica van ARISTOTELES, de zoogenaamde *formeele logica*, in beeld kan worden gebracht met behulp van cirkeltjes in een plat vlak en het is U wellicht ook bekend, dat wij in plaats van die figuurlijke afbeelding ook een afbeelding in formules kunnen geven. Stellen we begrippen door letters voor, bijvoorbeeld Nederlander door n, en wiskundige door w, dan kunnen we het begrip Nederlander òf wiskundige aangeven door:

$$n + w$$

en het begrip Nederlander èn wiskundige door:

$$n \times w.$$

In beide gevallen vatten we het gelijke der begrippen samen, in het eerste geval het gelijke naar den *omtrek*, in het tweede geval het gelijke naar den *inhoud*. En we hebben dan daarmede een rekenwijze doen ontstaan, waarvoor verschillende der gewone rekenwetten gelden, bijvoorbeeld:

$$a \times b = b \times a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c),$$

en die ook bijzondere eigenschappen heeft, bijvoorbeeld:

$$a + a = a \qquad\qquad a \times a = a$$

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

Over die rekenwijze, de zoogenaamde *Algebra der logica*, die in het laatste deel der vorige eeuw ontwikkeld werd, en thans een deel is van een veel meer omvattend syteem: de *Symbolische logica* van PEANO, wil ik thans niet verder uitweiden, voor mijn doel op het oogenblik is het alleen noodig er Uwe aandacht op te vestigen, dat wij hier met een soort wiskunde te maken hebben, waarin het begrip *quantiteit* nog niet optreedt. Het is een leer van „iets" en „wat anders" in hunne qualitateive betrekkingen, een leer van zuivere *qualiteit*. Als bijzonderheid, die U zeker zal interesseeren, wil ik alleen nog meedeelen, dat de kategorieën „alles" en „niets" in deze algebra gesymboliseerd worden door 1 en 0, aan welke symbolen we dan als het ware zwart op wit den omslag van het „alles" der qualiteit, het „voor zich zijn". tot de eenheid der quantiteit kunnen beleven.

Daarmede zijn we dan echter, alles bij elkaar genomen, zoo heel in het kort, (en anders dan kort kunnen we het hier niet doen), tot een merkwaardig resultaat gekomen, het resultaat namelijk, dat de wiskunde, zooals die thans is, zich opbouwt op de kategorieën van qualiteit, quantiteit en maat, dat is dus op *de eerste hoofdafdeeling der Hegelsche redeleer*, en dat dus eigenlijk alle vragen, betreffende de grondslagen der wiskunde vragen zijn die tot de kategorieënleer behooren.

Het zal u thans interesseeren, hoe men zich van mathematische zijde tegenover dit verband van wiskunde en kategorieënleer stelt. Laat mij u allereerst wijzen op de twee verschillende denkrichtingen, op mathematisch gebied, die in den laatsten tijd om den voorrang dingen, het intuitionisme en het formalisme. (Nog kort geleden werden die richtingen door Proffessor Brouwer van de Universiteit hier ter stede in zijne interessante inaugureele rede*) tegenover elkaar gesteld en vergeleken). Bedenken wij, dat de wiskunde een wetenschap is, waarin het eene uit het andere gededuceerd wordt, dan doemt de vraag op: wanneer alles wordt afgeleid, waaruit leiden we dan eigenlijk af, en daar hebben we dan de principieele vraag naar de grondslagen der wiskunde.

Volgens den formalist stellen we aan het begin eenige definities over het gebruik van symbolen, en voorschriften voor hunne onderlinge samenstelling en verwisseling, uit deze definities en voorschriften, *die volstrekt geen beteekenis hebben*, ontstaan dan, indien men de voorschriften getrouw opvolgt, geheele reeksen van nieuwe samenstellingen van

*) Dr. L. E. J. Brouwer, Intuitionisme en formalisme.

symbolen, *die ook weer geen beteekenis hebben.* Worden nu *bepaalde* symbolen en voorschriften aan het hoofd gesteld, dan is het mogelijk, aan de ontstane reeksen een beteekenis te hechten, *deze* voorschriften en symbolen hebben dus, wat de toepassing betreft, wat voor boven andere willekeurige, dat heeft echter voor den formalist niets met de wiskunde te maken, de wiskunde blijft wiskunde, ook zonder die beteekenis. BROUWER zegt bij zijn karakteriseering van het formalisme:

„De wiskundige exactheid ligt voor den formalist uitsluitend in de wijze van ontwikkeling der relatieserieën, en is onafhankelijk van de beteekenis, die men aan de relaties of aan de daardoor verbonden entiteiten zou willen toekennen. En deze beteekenislooze relatieserieën, voeren volgens den consequenten formalist eerst dan een wiskundig bestaan, wanneer ze met de mathematisch-logische wetten, die hun ontwikkeling beheerschen, in gesproken of geschreven woorden zijn verzinnelijkt tot de zoogenaamde *symbolische logica*"*).

Dat deze denkwijze, waarbij de wiskundige exactheid, zoals BROUWER dat aardig uitdrukt, alleen „op het papier" **) bestaat, tot scherpe kritiek aanleiding heeft gegeven, behoeft geen betoog, laat ik U alleen een nogal heldere uiteenzetting van den intuïtionist en Kantiaan PAUL NATORP voorlezen:

„Man setzt an die Spitze Definitionen, die ausdrücklich nur Vereinbarungen über den Gebrauch gewisser Symbole, nicht Urteile, die notwendigerweise wahr oder falsch wären, bedeuten. Man formuliert dann Grundsätze in Hinsicht dieser Symbole, d. h. gibt Vorschriften über die Zulässigkeit gewisser mannichfach wechselnder Zusammenstellungen derselben, Vorschriften die, schon weil sie nur die Zusammenstellung von Symbolen unerklärten Sinnes betreffen, ebenfalls nicht Urteile sein können, welche notwendig wahr oder falsch wären. Auch für diese Zusammenstellungen wird in der Tat kein weiterer Sinn angegeben oder vermisst; sie unterliegen einzig der Beschränkung, dass sie sich nicht selbst aufheben dürfen. Fortan rechnet

*) Dr. L. E. J. Brouwer, Intuitionisme en formalisme.

**) aldaar, bldz. 7.

man, d. h. stellt jene Symbole nach den gegebenen Vorschriften anders und anders zusammen. Ein Verständniss dieses ganzen Thuns wird in keiner Weise geboten, ist auch gar nicht erforderlich, vielleicht eher störend; die Rechnung verläuft genau so und bleibt ganz so zwingend, wenn man nichts dabei versteht, ausser dass den Regeln gemäss verfahren wird. Mau könnte sich die aufgestellten Grundbe griffe durch Rechenmarken ersetzt denken und könnte einen Automaten ersinnen, in den man die Marken nach der durch die Grundsätze bestimmten Ordnung obenhineinsteckte, und der dann das Resultat, nämlich dieselbe Rechenmarken oder gewisse von diesen, nur in einer anderen Ordnung, unten herausfallen liesse. So könnte man in buchstäblichem Sinne Schlüsse „ziehen".

Sei dies nun Wissenschaft oder Spiel, belehrend oder bloss unterhaltend, oder beides oder keins von beiden, für uns genügt zu erklären, dass wir die Aufgabe der Logik so nicht vestehen. Nämlich uns kommt es in der Logik zuerst und zuleztz auf Sinn, auf verstehen an, während wir frank und frei bekennen, bei jenem ganzen Tun nicht viel oder wenig, sondern nichts zu verstehen. Denn weder, dass das Verfahren den aufgestellten Regeln entspricht, noch dass das Ergebniss manchmal (nicht immer) mit etwas, das wir anderweitig zu verstehen glauben, zuzammentrifft, gibt uns ein Verständniss des Sinns dieses Tuns. Soll es überhaupt einen haben".*)

Waarin zien nu de intuïtionisten de fout van het formalisme? In het kort daariu, dat aan alle wiskundige analyse een synthese vooraf heeft te gaan, en niet een beteekenislooze synthese, maar een synthese uit het denken zelf, een *synthese a priori*. En daarbij komt men dan weer terug tot KANT's centrale probleemstelling: „Hoe zijn synthetische oordeelen a priori mogelijk?" waaraan zich de vraag aansluit, welke synthetische oordeelen a priori als de grondslagen der wiskunde moeten worden beschouwd. Daarover zijn de intuïtionisten het nu echter nog allerminst eens.

POINCARÉ, die, niettegenstaande hij een synthetisch ele-

*) P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, bldz. 6.

ment uit het denken erkent, toch hier en daar sterk tot het formalisme neigt, ziet dat synthetisch element alleen in de zoogenaamde volledige inductie, dat is het bewijs, waarbij men aantoont dat een waarheid voor het getal n geldt, indien bewezen is, dat ze voor n — 1 geldt, en dan zegt: dan geldt die waarheid ook voor alle getallen.*) Overigens maakt hij het bestaan van wiskundige systemen niet afhankelijk van die synthese, maar zegt bijv.: „en mathématique le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie *exempt de contradiction*", wat, zooals u bemerken zult, zuiver formalistisch is.

Zuiver intuïtionistisch is het standpunt van BROUWER. Als grondslag der wiskunde (en van alle werking van het intellect) stelt hij de oerintuïtie der wiskunde. Die oerintuïtie definieert hij dan op verschillende plaatsen ietwat afwijkend; en ik wil derhalve ter wille van de groote belangrijkheid van deze kwestie, eenige verschillende plaatsen even woordelijk aanhalen:

„In de volgende hoofdstukken zullen wij nader ingaan op de oer-intuïtie der wiskunde (en van alle werking van het intellect) als het van qualiteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, eene eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een „tusschen", dat door inschakelen van nieuwe eenheden zich nooit uitput. Waar dus in die oer-intuïtie continu en discreet als onafscheidelijke componenten optreden, beide gelijkberechtigd en even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op zichzelf gestelde andere op te bouwen; immers het is al onmogelijk, dat andere op zichzelf te stellen"**).

„De wiskunde is een vrije schepping, onafhankelijk van de ervaring; zij ontwikkelt zich uit een enkele aprioristische oer-intuïtie, die men zoowel kan noemen *constantheid in wisseling* als *eenheid in veelheid*"***).

---

*) Verg. bijv. H. Poincaré, la science et l'hypothèse, Deel I, Hoofdstuk I.

**) Dr. L. E. J. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde, bldz. 8

***) Aldaar bldz. 179.

„Hoe zwak nadeze ontwikkelingsperiode der wiskunde het intuïtionisme ook scheen te staan, het heeft zich hersteld, door van de theorie van KANT de aprioriteit der ruimte prijs te geven, doch aan de aprioriteit van den tijd des te vastberadener vast te houden. Dit neo-intuïtionisme ziet het uiteenvallen van levensmomenten in qualitatief verschillende deelen, die alleen gescheiden door den tijd, zich weer kunnen vereenigen, als oergebeuren in het menschelijk intellect, en het abstraheeren van dit uiteenvallen van elken gevoelsinhoud tot de intuïtie van twee-eenigheid zonder meer, als oergebeuren van het wiskundig denken" *).

„Eindelijk is in de oer-instuitie der wiskunde, waarin het saamgehoudene en het gescheiden, het continue en het discrete vereenigd liggen, mede onmiddellijk aanwezig de intuïtie van het lineaire continuum, d.w.z. van het „tusschen". dat door inschakeling van nieuwe eenheden zich nooit uitput, dus ook nooit als verzameling van eenheden zonder meer kan worden gedacht" **).

Zien we nu eens een oogenblik af van de voor onze wijze van denken wat vreemde inmenging van de natuurkategorie tijd, dan blijkt dus de oerintuïtie van BROUWER een samenvatting te zijn van *kategorieën der quantiteit*, te weten:

BESTENDIGING en VERKEERING (alleen quantitatief gedacht),

EENHEID en VEELHEID,

CONTINUITEIT en DISCRETIE.

Bijzonder valt ons dan daarbij nog op het volkomen juiste, en in een niet-Hegeliaan zeker bijzonder te waardeeren besef van de noodzakelijke eenheid van tegendeelen in elk dezer kategorieënparen. Aan den anderen kant bemerken we daarentegen een volkomen, en zelfs uitdrukkelijk, afwijzen van de kategorieën der qualiteit.

We kunnen nu a priori verwachten, dat dit stelsel zonder meer opgaat voor wat wij genoemd hebben het zuiver quantitatieve gedeelte der wiskunde, dat er echter wrijvingsverschijnselen zullen optreden in zijn verhouding tot de algebra der logica aan den eenen kant en tot stelsels

*) Inaugureele Rede, bldz. 11.
**) Aldaar bldz. 12.

met verschillende soorten eenheden aan den anderen kant.

En dat is dan ook inderdaad het geval. In de eerste plaats erkent Brouwer de algebra der logica niet als iets dat een eigen bestaan heeft, wat volkomen consequent is. Hij zegt bijvoorbeeld „dat de wiskunde onafhankelijk is van de zoogenaamde *logische wetten*", waarmee hij dan bedoelt de formeele logica, die wij hier als het quantiteitsvrije deel der wiskunde beschouwd hebben, en iets verder zegt hij:

„Is dus de wiskunde niet afhankelijk van de logica, de logica is wel afhankelijk van de wiskunde: vooreerst het *intuïtief logisch redeneeren* is dat bijzonder wiskundige redeneeren, dat overblijft, als men bij het bekijken der wiskundige systemen zich uitsluitend beperkt tot relaties van *geheel en deel*, de beschouwde wiskunde-systemen zelf dragen in geen opzicht een speciaal elementair karakter, dat een prioriteit van logisch redeneeren ten opzichte van gewoon wiskundig redeneeren zou kunnen wettigen. Men zou kunnen aanvoeren: De relatie *opvolger zijn van*, die het redeneeren in de eigenlijke wiskunde beheerscht, treedt in de wiskunde van het logisch redeneeren *nog niet* op. Dan dient geantwoord: Die relatie treedt weliswaar *niet meer expliciet* op, maar ze is er zoo goed als in alle wiskunde verondersteld; immers ze vergezelt allen wiskundigen opbouw, hoezeer ze ook na het beëindigen van den bouw bij zekere relaties tusschen de elementen niet meer als zoodanig duidelijk in het oog springt"*).

Aan den anderen kant richt hij zich scherp tegen de hoogere getalklassen van Cantor, die niet zuiver op de quantiteitskategorieën zijn op te bouwen, welke onmogelijkheid hij afdoende bewijst. Die getalklassen wil hij dan ook niet als tot de wiskunde behoorend erkennen en ook dit is weer even consequent. Nu kant hij zich niet tegen het invoeren van stelsels van meerdere afmetingen, iets wat we op grond van het straks gezegde toch hadden moeten verwachten en ik voor mij zou dat hier anders willen hebben, het is echter niet mijn doel hier bestaande

*) Over de grondslagen der wiskunde, bldz. 127.

stelsels te kritiseeren en slechts, u te laten zien, wat er in de denkbaarheden der moderne wiskunde ligt, voorzoover mij dat zelf duidelijk is. Daarom wil ik over dit punt heenloopen, temeer, daar wij straks nog eenige andere schrijvers zullen hooren, die opvattingen huldigen, welke weer meer overeenkomen met de wijze waarop we het hier doordenken.

Ik zou nu eens het volgende met u willen bedenken. Wie op de basis der quantiteitskategorieën de eendimensionale getallenrij opbouwt, komt op twee wijzen in aanraking met de kategorieën der qualiteit. In de eerste plaats zal hij aan het begin, bij het stellen van eenheid en *andere* eenheid, zich moeten afvragen, waarin dat andere van die eenheid dan wel bestaat. En dan is het antwoord, dat dat onderscheid, dat in zekeren zin wel geen onderscheid meer mag heeten, toch in zooverre het nog onderscheid is, in elk geval nog niet quantitatief is, maar alleen *qualitatief* kan wezen. Het is u allen bekend, dat HEGEL het stellen van eenheid en andere eenheid dan ook nog behandelt in het hoofdstuk der qualiteit. Met andere woorden, de mogelijkheid van het stellen van veel eenheden vooronderstelt al het bedacht hebben van de kategorieën „iets" en „wat anders", van de kategorieën der *qualiteit*.

In de tweede plaats komt, bij het invoeren van getallen van verschillende soort, zij het dan hoogere complexe getallen of andere, wederom de noodzakelijkheid van de qualiteitskategorieën op den voorgrond. Want dat verschil kan ook hier weer niet van quantitatieven aard zijn. We hebben dat besef al gevonden bij BUÉE met betrekking tot de complexe getallen, en vinden het in onzen tijd weer terug bij NATORP en bij COHN, welke laatste in dit verband uitdrukkelijk opmerkt, dat de qualitatieve onderscheidbaarheid der eenheden „*unter den Voraussetzungen der Arithmetik nicht vorkommt*".*)

Hebben wij thans gezien, hoe BROUWER zich geheel baseert op de kategorieën der quantiteit, de Kantiaan PAUL NATORP gaat verder, en legt aan de wiskunde *DE kategorieën* als

*) J. Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, bldz. 214.

zoodanig, en wel in Kantschen zin gevat, ten grondslag. Daarbij ontwikkelt hij dan voorzoover het de kategorieën van qualiteit en quantiteit betreft, die hij iets anders dan KANT, en zuiver als tegendeelen in een eenheid stelt, een stelsel, dat vrij is van natuurkategorieën, en dat inderdaad alle bewondering verdient. Verderop leidt hem het Kantsche schema tot het invoeren van kategorieën die wij daar in dat verband nu nog liever niet zouden zien, houden we ons echter alleen aan quantiteit en qualiteit, dan moet worden erkend, dat NATORP tot een opstelling gekomen is, die alle aandacht verdient, en zeker van dialectischen geest doortrokken is, hoewel er zeer belangrijke afwijkingen met de Hegelsche opstelling te constateeren zijn. Tegenover eenheid, veelheid en hoeveelheid in het quantitatieve stelt hij identiteit, verscheidenheid en gelijkheid in de qualiteit en u bemerkt hier al dadelijk het verschil met de Hegelsche kategorieënleer. Intusschen zijn zijn uitwerkingen van dien aard, dat wel geen Hegeliaan, die van deze dingen een studie gemaakt heeft, zijn boek geheel onbevredigd ter zijde zal leggen. Zijn afleiding der wiskundige grondslagen uit deze kategoriale vooropzettingen is bijzonder interessant, vooral waar hij er telkens weer op wijst, hoe zelfs de zuivere quantiteitsleer eigenlijk toch weer niet zonder meer, en zonder inmenging der qualiteit op te stellen is, een zuiver dialectische gedachte. Inderdaad zijn dan ook het positieve en het negatieve, het rationeele en het irrationeele, de eenheid zonder meer en het als eenheid gestelde getal in een getalverhouding, niet meer zuiver en alleen quantitatief verschillend en hebben wij hier al voorloopers te erkennen van de kategorie der maat.

Het besef, dat wij voor de invoering van CANTORS transfinite getallen, de kategorieën der qualiteit noodig hebben, treedt bij NATORP zeer duidelijk op, en in zooverre vormt NATORPS werk „Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften" een zeer te waardeeren aanvulling op BROUWERS „Grondslagen der wiskunde". Kort uitgedrukt is BROUWERS standpunt: 1e. Transfinite getallen kunnen niet worden afgeleid uit de quantiteit. 2e. Zij behooren dus niet tot de wiskunde, en dat van NATORP: 1e. Transfinite getallen kunnen niet worden afgeleid uit de quantiteit zonder meer, maar wel in verband met de kategorieën der qualiteit, 2e. De wiskunde bouwt zich op op qualiteit *EN* quantiteit, en de genoemde getallen behooren dus wel tot de wiskunde.

Merkwaardig is, dat NATORP zoo weinig zegt over de zoogenaamde Algebra der logica. Aan de hand van het Kantsche schema brengt hij haar ten slotte onder de modaliteit. Dat hij juist tot die modaliteit komt is niet onbegrijpelijk. Aan den eenen kant toch vormt de qualiteitswiskunde de mogelijkheid der wiskunde, evenals in het zuivere quantiteitsdeel die wiskunde zich aan ons vertoont in haar karakter van noodzakelijkheid, en zij zich in de leer der hoogere getallen eindelijk, waar alle gebondenheid aan bepaalde regels van vermenigvuldiging enz. vervalt, tot hare volle vrij heid ontplooit. Anderzijds, en dit is een van NATORP's argumenten, zijn al onze *bewijzen* gericht op het aantoonen van mogelijkheid, onmogelijkheid en noodzakelijkheid, en daar de algebra der logica ons de regels dier bewijsvoeringen verschaft, staat zij in verband met de kategorieën der modaliteit. Nu is er zeer zeker tusschen dit alles verband, evenals er verband is tusschen de formeele logica en den Hegelschen drieslag BEGRIP, OORDEEL en SLUITREDE, maar het gaat hier niet om dat verband, het gaat er om, welke kategorieen als de grondslagen der in formules gebrachte logica van ARISTOTELES te beschouwen zijn, en dan is het zeker, dat deze logica niets anders is, dan een leer van „iets" en „wat anders" in hun onderlinge nog niet quantitatieve betrekkingen, een leer, die zich dus opbouwt op de kategorieën der *qualiteit*.

Hoewel NATORP deelen der wiskunde erkent, die uit een samenwerking van qualiteit en quantiteit zijn geboren, brengt hij deze niet onder een nieuwe kategorieënafdeeling, en een zulke zou hem dan ook in het Kantsche stelsel ontbroken hebben. Waar wij echter in de dialectische redeleer naast qualiteit en quantiteit beschikken over de kategorieënafdeeling der *maat*, daar ligt het voor ons voor de hand, die deelen der wiskunde te beschouwen als een *leer van maat*, en zoo tot de opstelling te komen, die ik reeds straks aangaf:

de logistiek:		leer van qualiteit,
de arithmetiek en de algebra zonder imaginairen	:	leer van quantiteit,
de algebra der hoogere getalstelsels	:	leer van maat.

De meetkunde en de zuivere bewegingsleer beschouwen wij dan als de leer der maat in hare eerste toepassing, zijnde de toepassing op het eerste paar natuurkategorieën, ruimte en tijd.

* * *

Ik hoop U door deze beschouwingen over de leer van verschillende intuïtionistische schrijvers te hebben doen zien, dat er in de moderne mathematiek een streven bemerkbaar is, de kategorieënleer binnen de sfeer van hare werkzaamheid te trekken, en in deze kategorieënleer het fundament harer, en zoo aller, wetenschap te zoeken. Waar dit nu van Kantiaansche zijde reeds uitdrukkelijk is geschied, daar is het mijns inziens van het grootste belang voor de wetenschap, dat de Hegeliaansche school, die dan toch over de meest uitgewerkte kategorieënleer beschikt, die er op het oogenblik bestaat, deze vragen eens van haar standpunt beziet, en in den modernen mathematischen strijd stelling neemt. Mij dunkt dat hier voor de mathematisch ontwikkelden onder de Hegelianen van onzen tijd, en speciaal onder ons Hollanders, die het voorrecht hebben gehad van een zoo meesterlijke inleiding in de Hegelsche gedachtenwereld, een schoone taak is weggelegd. Met de opstelling, die ik hier gaf, heb ik dan ook slechts getracht u tot verdere bestudeering dezer vragen op te wekken, ik verzoek u vooral, die opstelling als een geheel voorloopige te beschouwen, die voor mij zelf slechts een soort program is, en die naar ik hoop op u, al is het ook wellicht niet overtuigend, dan toch animeerend heeft gewerkt.

Indien dat zoo is, wil ik alleen nog voor twee dingen waarschuwen. Om in deze richting iets te bereiken, wat wetenschappelijke waarde heeft, en alleen daarom kan het ons te doen zijn, is zooveel *detailkennis* noodig, zooveel echt *wiskundig* weten. dat een ieder, mag hij ook nog zoo philosophisch of zelfs logisch geschoold zijn, zonder die kennis buiten staat is iets anders te doen dan tijdverknoeien, het zou dan moeten zijn, dat hij over een genie beschikte, dat hem in staat stelde waarheden te zeggen, die hij zelf niet kan begrijpen. Den niet-wiskundigen onder u beveel ik dus ten sterkste aan: of bestudeer wiskunde, of blijf van de kategorieën der zijnsleer af. In de tweede plaats hebben we te verwachten, dat bij de bestudeering van de grondslagen der wiskunde in verband met de kategorieënleer zal blijken, dat er een eeuw van denken, een eeuw van mathematische ontwikkeling, na HEGEL is voorbijgegaan, een eeuw, waarop HEGEL's arbeid allerminst zonder invloed is gebleven, een eeuw echter ook, waarin zich vele nieuwe begrippen hebben ontwikkeld en waarin vele reeds bekende begrippen zich hebben veranderd en verruimd. Begrippen als: getal, vermenigvuldiging, imaginair, hebben we nu eenmaal in 1913 anders te denken dan in 1813 en HEGEL's behandeling dier begrippen, heeft dan ook in onzen tijd allerminst op ieder punt zonder meer te gelden. Wanneer er dus van Hegeliaansche zijde van deze dingen studie gemaakt wordt, en wanneer dat geschiedt door personen, die het begrip boven de letter stellen, dan is het zeer waarschijnlijk, dat de resultaten in, wellicht belangrijke, punten van HEGEL's opstellingen zullen blijken af te wijken, hoewel zeer zeker ook menigmaal het geniale van HEGEL's visie aan het licht zal treden. Een buitenstaander zou dan kunnen zeggen, dat die resultaten heelemaal niet meer Hegeliaansch zijn, en daar zou hij dan, verstandig gesproken, wel gelijk in kunnen hebben. De ware dialecticus ziet echter de bestendiging juist alleen in de verkeering, hij begrijpt, dat het dialectisch denken, dat blijft staan, geen dialectisch denken meer is, en dat men allerminst HEGEL verloochent, waar men een van zijn opstellingen vervangt door een andere, die, gegrond op een eeuw van ontwikkeling, de resultaten dier ontwikkeling omvat, en zich aanpast aan het denken van onzen tijd. Wij hebben dus, mocht een dergelijk geval eens optreden, te begrijpen, dat dat in de rede ligt, wij hebben te waken tegen het angstvallig vasthouden aan de letter en bovenal zullen wij ons hebben te onthouden van het op touw zetten van ketterjachten.

Want waar het ten slotte om gaat is niet het denken van HEGEL, of laat ik zeggen den vorm, waarin HEGEL het ware denken trachtte te vatten, maar het gaat om het ware denken zelf, om het denken van het *WARE* zelf. En het hoogste wat wij kunnen bereiken is dit, dat wij in een bepaalden tijd den vorm weten te vinden, die voor dien tijd de meest zuivere uitdrukking is van dat denken, van de *IDEE*.